

Archimede 2021 - Biennio

2. Sapendo che  $(5 - 4x)(5x - 4) = 0$ , quale può essere, al massimo, il valore di  $3 - 2x$ ?
- (A)  $7/5$       (B)  $1/2$       (C)  $5/7$       (D)  $3/4$       (E)  $4/7$

Archimede 2021 – Triennio

2. Sapendo che  $(3x + 2)(7 - 4x)(4x + 7) = 0$ , quale può essere, al massimo, il valore di  $5 - \frac{3}{x}$ ?
- (A)  $23/7$       (B)  $35/4$       (C)  $22/3$       (D)  $19/2$       (E)  $47/7$
9. Consideriamo i valori reali  $k$  tali che il polinomio  $p(x) = x^2 - (k + 1)x + (3k + 1)$  abbia una radice che è doppia dell'altra. Indicare la somma di tutti questi valori  $k$ .
- (A)  $19/2$       (B)  $9$       (C)  $17/4$       (D)  $23/2$       (E)  $19/4$

(Archimede 2021 – Triennio 1101 – 12 sulle funzioni)

Archimede 2018 – Triennio – T1

17. Si consideri l'equazione  $ax^2 - bx + a = 0$  nell'incognita  $x$ , dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali positivi. Tra le seguenti 5 affermazioni, quante sono quelle vere?
- Se  $b > 2a$ , ci sono due soluzioni reali distinte.
  - Se ci sono due soluzioni reali distinte, esse sono positive.
  - Se una delle soluzioni è 9 volte l'altra, allora  $b > 3a$ .
  - Qualunque siano  $a$  e  $b$ , non possono esserci due soluzioni intere distinte.
  - Se ci sono due soluzioni reali, il loro prodotto è 1.
- (A) solo 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) tutte e 5

#### Febbraio 2022

4. Il polinomio  $p(x)$  ha la seguente proprietà: per ogni terna di interi  $a, b, c$  tali che  $a + b + c = 2022$  si ha che  $p(a) + p(b) + p(c) = p(674)$ . Si sa inoltre che  $p(0) = -2696$ . Quanto vale  $p(2022)$ ?  
(A)  $-2696$  (B)  $674$  (C)  $5392$  (D)  $8088$  (E) Non è possibile determinarlo con i dati forniti.

#### Febbraio 2021

5. Nello studiare il polinomio  $p(x) = x^2 + 2x - 6$ , Enrica ha scoperto due numeri reali distinti  $\alpha$  e  $\beta$  tali che  $p(\alpha) = \beta$  e  $p(\beta) = \alpha$ . Quanto vale  $\alpha + \beta$ ?  
(A)  $-3$  (B)  $-2\sqrt{2}$  (C)  $0$  (D)  $2$  (E)  $6$

#### Febbraio 2019

9. Marcella, giocando, trova per puro caso due polinomi  $p(x)$  e  $q(x)$ , non costanti e a coefficienti interi, verificanti la relazione:

$$p(q(x+1)) = p(x^3)q(x+1)^5.$$

Che cosa possiamo affermare con certezza dei due polinomi trovati da Marcella?

- (A) Il coefficiente direttore di  $p(x)q(x)$  è positivo (B) Il polinomio  $q(x)$  non possiede radici intere (C) Il grado di  $q(x)$  non supera quello di  $p(x)$  (D) La somma dei coefficienti di  $p(x)$  è dispari (E) Il grado di  $p(x)q(x)$  è multiplo di 8

#### Febbraio 2014

10. Consideriamo il polinomio  $p(x) = (1 + x^{3^1})(1 + x^{3^2})(1 + x^{3^3})(1 + x^{3^4})(1 + x^{3^5})(1 + x^{3^9})$ , e supponiamo di svolgere il prodotto, ottenendo quindi un'espressione del tipo  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{402}x^{402}$ , dove ad esempio  $a_0 = a_{402} = 1$ . Quanti dei coefficienti  $a_0, \dots, a_{402}$  sono diversi da zero?  
(A) 52 (B) 56 (C) 60 (D) 64 (E) 376

#### Febbraio 2013

9. Sapendo che il polinomio  $p$  è tale che, per ogni intero  $n$ ,  $p(5^n - 1) = 5^{5^n} - 1$ , quanto varrà  $p(3)$ ?  
(A) 1023 (B) 999 (C) 874 (D) 242 (E) 0

#### Febbraio 2012

14. Siano  $p(x)$  e  $q(x)$  due polinomi *distinti* di grado minore o uguale a 3, a coefficienti interi e tali che

$$p(1) = q(1), p(2) = q(2), p(3) = q(3),$$

$$p(-1) = -q(-1), p(-2) = -q(-2), p(-3) = -q(-3).$$

Qual è il minimo valore che può assumere  $[p(0)]^2 + [q(0)]^2$ ?

#### Febbraio 2010

7. Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero  $(10^{16} + 1)(10^8 + 1)(10^4 + 1)(10^2 + 1)(10 + 1)$ ?  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

#### Febbraio 2007

13. Sia  $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \dots + a_1x + a_0$  un polinomio, con gli  $a_i$  interi. Sappiamo che, per tutti gli interi  $k$  compresi tra 1 e 20,  $p(k) = 2k$ . Quali sono le ultime 3 cifre di  $p(21)$ ?

GaS 2017 – A

**7. PESTE NERA**

“La peste del 1347 ha davvero ucciso moltissime persone”, osservò uno dei pellegrini. “Ne ho studiato attentamente la diffusione e ho scoperto che se chiamiamo  $a_n$  le persone infette al giorno  $n$  dall’inizio dell’epidemia, vale  $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} + 9^2a_{n-3} + \dots + 9^{n-1}a_0$  per  $n \geq 1$ . Sapendo che  $a_0 = 2017$ , quante cifre ha il numero di persone infette al giorno 2017?”

GaS 2022 – A

**13. La sfida tra i gladiolimpionici**

CanThor è finito sul pianeta di Schwarzaar, dove, per ritornare sulla terra, deve sfidare come gladiolimpionico il campione di Schwarzaar, che si rivela essere il suo collega di lavoro Convex Hulk. Il Gran Maestro pone allora loro il seguente problema: «Cari gladiolimpionici, una successione di polinomi è definita per ricorrenza da  $p_0(x) = 1$  e  $p_{n+1}(x) = (x - 7)p_n(x) + p_n(2022)$  per ogni intero non negativo  $n$ . Chi determinerà il più grande intero  $k$  per cui  $4^k$  divide  $p_{2022}(7)$  avrà salva la vita!». CanThor riesce a risolvere correttamente il problema per primo: qual è la sua risposta?

GaS 2018 – A

**11. Il Grande Almanacco delle Olimpiadi di Matematica [★]**

Ad ogni edizione delle Olimpiadi di Matematica, a partire dalla numero zero, Biff Tauber scommette sul vincitore grazie al Grande Almanacco. La vincita che ottiene all’edizione  $n$  è di  $a_n$  dollari, dove  $a_0 = 0$ , e per ogni intero  $n$  valgono le relazioni  $a_{3n} = a_n$ ,  $a_{3n+1} = a_n - 1$ , e  $a_{3n+2} = a_n + 2$ . Finita l’edizione numero 2018, Biff realizza che, dall’inizio delle scommesse, ha guadagnato una montagna di dollari. Quanti, di preciso?

GaS 2016 – A

**7. La specie più intelligente**

Gli umani non sono che la terza specie più intelligente del pianeta Terra, dopo i delfini e i topi. Difatti, data una successione tale che  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ , e  $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$  per ogni  $n \geq 2$ , i topi sanno calcolare immediatamente quanto vale  $a_{2016} + 3a_{2015}$ . Gli umani invece possono al massimo determinare le ultime tre cifre di questo numero. Quali sono queste ultime tre cifre?

## GaS 2022 – A

### 16. Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [★]

Eigen Man verifica le abilità matematiche di J.A.R.V.I.S., l'intelligenza artificiale da lui creata. Scrive al touch screen il polinomio  $x^{2022} + 3x^{2021} + 3^2x^{2020} + \dots + 3^{2020}x^2 + 3^{2021}x + 3^{2022}$ ; J.A.R.V.I.S., in ogni momento, può:

- riscrivere il polinomio scritto al touch screen in un qualunque modo come prodotto di polinomi a coefficienti reali e di grado maggiore o uguale a 1; oppure
- cancellare un fattore di secondo grado  $ax^2 + bx + c$  e sostituirlo con  $(b-c)x + c$ .

Dopo che J.A.R.V.I.S. ha effettuato un certo numero di mosse, Eigen Man legge al touch screen un polinomio  $p(x)$  di primo grado, e si chiede quale sia la soluzione di  $p(x) = 0$ . *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

## GaS 2022- F

### 5. Un riscaldamento contoso

Appena giunti su Titano, il pianeta natale di tanh(os), Dr. Stringa si accinge a calcolare in quanti dei possibili futuri gli Avengers usciranno vittoriosi. Prima di un calcolo così complicato ha però bisogno di un riscaldamento e chiede ad Eigen Man un problema contoso da risolvere.

Eigen man: «Prova questo! Hai  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  un polinomio di terzo grado. Dette  $x_1, x_2, x_3$  le sue radici, sai che  $x_1, x_2, x_3, x_1x_2x_3$  sono numeri interi in modulo minori o uguali a 51 e che  $x_1 + x_2 + x_3$  è un numero pari. Quanto vale, al massimo,  $b$ ?»

Dr. Stringa: «Elementare! Purtroppo i futuri in cui vinciamo sono molti di meno...»

Qual era la risposta al problema proposto da Eigen Man?

## GaS 2018 – A

### 7. Indovinelli dal passato [★★]

Nel 1955 Matryx riceve la lettera di  $\widehat{DOC}$  dal vecchio West, la quale recita così “Ci sono tante miniere, ognuna indicata da un intero. La DeuLerean si trova in quella che corrisponde al numero di coppie *non ordinate* di polinomi  $p(x), q(x)$  a coefficienti interi *strettamente positivi*, di grado 4, tali che  $p(1) + q(1) = 26$  e che il polinomio  $(p(x)q(x))^7$  abbia esattamente un coefficiente dispari”. Di quale miniera si tratta?

### 11. Il Grande Almanacco delle Olimpiadi di Matematica [★]

Ad ogni edizione delle Olimpiadi di Matematica, a partire dalla numero zero, Biff Tauber scommette sul vincitore grazie al Grande Almanacco. La vincita che ottiene all'edizione  $n$  è di  $a_n$  dollari, dove  $a_0 = 0$ , e per ogni intero  $n$  valgono le relazioni  $a_{3n} = a_n$ ,  $a_{3n+1} = a_n - 1$ , e  $a_{3n+2} = a_n + 2$ . Finita l'edizione numero 2018, Biff realizza che, dall'inizio delle scommesse, ha guadagnato una montagna di dollari. Quanti, di preciso?

## GaS 2018 – F

### 12. Mi faccia un'altra domanda [★]

Quando insegnava all'Università di Marte, il prof. Fredholm era solito dare questo problema ai suoi studenti più promettenti, o a quelli che gli stavano più antipatici. Sia  $f$  un polinomio a coefficienti reali che non ha radici multiple. Quante radici multiple può avere, al massimo, il polinomio  $g(x) = f(x^3 - 3x)$ ? *Si dice che  $\lambda$  è una radice multipla del polinomio  $p(x)$  se  $\frac{p(x)}{(x-\lambda)^2}$  è un polinomio.*