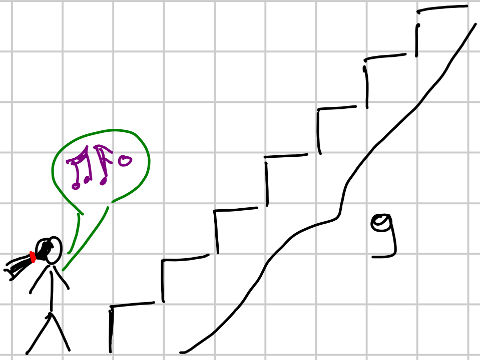
SUCCESSIONI PER RICORRENZA



1 scalino o 2 scalini alla volta

In quanti modi può salire le scale?

n = numero di scalini

n	# modi
1	1
2	2
3	3
4	$2+3=5$
5	$5+3=8$

Se devo salire n scalini, il primo passo può essere:

i) da 1 e allora conto poi i modi di salire $n-1$ scalini

ii) da 2, e allora conto poi i modi di salire $n-2$ scalini

$\Rightarrow$ # modi con n scalini

$\parallel$

modi con $n-1$ scalini

$+$

modi con $n-2$ scalini

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \boxed{55}$$

Successione di FIBONACCI

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \qquad a_n \qquad n \in \mathbb{N}.$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

ES: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \boxed{2} & n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$ Successione ARITMETICA

$3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$ → Passo / Ragione

$a_n = \alpha + n \cdot k \longrightarrow \begin{cases} a_n = a_{n-1} + k \\ a_0 = \alpha \end{cases}$

ES: $\begin{cases} a_n = \boxed{\frac{1}{3}} a_{n-1} & n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ Successione GEOMETRICA

$2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$ → Ragione

$a_n = k^n \cdot \alpha \qquad \begin{cases} a_n = k \cdot a_{n-1} \\ a_0 = \alpha \end{cases}$

ES: $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

$a_0 = 2$
$a_1 = 3 \cdot a_0 + 1 = 7$
$a_2 = 3a_1 + 1 = 22$
$a_3 = 3a_2 + 1 = 67$

$b_n = a_n + c$

$a_n = b_n - c$

$a_n = 3a_{n-1} + 1$
$\downarrow$
$b_n - c = 3(b_{n-1} - c) + 1$
$b_n = 3b_{n-1} - 3c + c + 1$
$b_n = 3b_{n-1} - 2c + 1$

Se pongo $c = \frac{1}{2}$, la successione $b_n = a_n + \frac{1}{2}$ rispetta la regola $b_n = 3b_{n-1}$, $b_0 = a_0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\Longrightarrow b_n = 3^n \cdot \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \quad a_n = 3^n \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

Es:
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + n - 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$b_n = a_n + c \cdot n + d$

c, d da determinare

$$a_n = b_n - c \cdot n - d$$

$$b_n - c \cdot n - d = \frac{1}{2} b_{n-1} - \frac{c}{2} n - \frac{d}{2} + n - 1$$

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} + \frac{c}{2} n + n + \frac{d}{2} - 1$$

$$\underbrace{n\left(\frac{c}{2}+1\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{d}{2} - 1}_{=0}$$

$d = 2$

$c = -2$

$$b_n = a_n - 2n + 2$$

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} \\ b_0 = 3 \end{cases} \longrightarrow b_n = \frac{3}{2^n}$$

$$\boxed{a_n = \frac{3}{2^n} + 2n - 2}$$

Es:
$$\begin{cases} \boxed{a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}} \ (*) & n \geq 1 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Provo a vedere se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$a_n = c \cdot \lambda^n$ è soluzione della prima equazione $(*)$

$$\cancel{c} \cdot \lambda^{n+1} = 3\cancel{c}\lambda^n - 2\cancel{c}\lambda^{n-1}$$

$$\lambda^2 = 3\lambda - 2 \qquad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \ \text{o} \ \lambda = 2$$

$\boxed{\lambda=1}$ $\quad a_n = c\cdot 1^n \ \forall n\geq 0 \qquad c1^{n+1} = 3c\cdot 1^n - 2c\cdot 1^{n-1}$

$\boxed{\lambda=2}$ $\quad a_n = 2^n\cdot c \quad \forall n\geq 0 \qquad c2^{n+1} = 3c2^n - 2c2^{n-1}$

$$\begin{cases} \boxed{a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}} \ (*) & n\geq 1 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Se definisco $a_n = c_1\cdot 1^n + c_2\cdot 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{3a_n - 2a_{n-1}} = 3(c_1\cdot 1^n + c_2\cdot 2^n) - $$
$$- 2(c_1\cdot 1^{n-1} + c_2\cdot 2^{n-1}) =$$
$$= 3c_1\cdot 1^n + 3c_2\cdot 2^n - 2c_1\cdot 1^{n-1} - 2c_2\cdot 2^{n-1} =$$
$$= \underbrace{3c_1\cdot 1^n - 2c_1\cdot 1^{n-1}}_{c_1\cdot 1^{n+1}} + \underbrace{3c_2\cdot 2^n - 2\cdot c_2\cdot 2^{n-1}}_{c_2\cdot 2^{n+1}} =$$
$$= c_1\cdot 1^{n+1} + c_2\cdot 2^{n+1} \boxed{= a_{n+1}}$$

Condizioni iniziali

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_n = c_1 + c_2\cdot 2^n$

$a_0 = c_1 + c_2 = 0$

$a_1 = c_1 + 2c_2 = 1$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & n\geq 1 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

eq. caratteristica

$\lambda^2 = \lambda + 1$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$Q_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$Q_0 = c_1 + c_2 = 0 \qquad Q_1 = \frac{c_1+c_2}{2} + \sqrt{5}\,\frac{c_1-c_2}{2} = 1$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \dfrac{c_1+c_2}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}(c_1 - c_2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad c_1 = -c_2 \qquad 2c_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \to c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Formula di BINET

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{1}{2}\;\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}} =$$

$$1+\sqrt{5} \sim 3, \dots$$

$$1-\sqrt{5} \sim -1, \dots$$

$$= \frac{1}{2}\;\frac{(1+\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^{n-1}} \left(\frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \left(\frac{1 - \xi^n}{1 - \xi^{n-1}} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

n scalini, 1 o 2 alla volta n pari

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{n/2}{n/2}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & & & & & \\
1 & 1 & 2 & & & & & \\
1 & 1 & 3 & 5 & & & & \\
1 & 2 & 1 & 8 & 13 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & 21 & 34 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & & & & & & &
\end{array}
$$

Es: Quante sono le stringhe binarie lunghe 12 che non contengono due 1 consecutivi

$\underbrace{\boxed{\text{ok}}}_{11}$ 0 va sempre bene

$\underbrace{\boxed{\text{ok}}}_{11}$ 1 va bene se la stringa da 11 finisce con 0.

a_n = stringhe buone lunghe n che finiscono con 0
b_n = " " " " " " " 1

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_1 = 1 & a_2 = 2 \\ b_1 = 1 & b_2 = 1 \end{matrix}$$

$\hookrightarrow b_n = a_{n-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Fibonacci}$$

$$\underset{\substack{\| \\ T_{n+1}}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = a_n + \underset{\substack{\| \\ a_{n-1}+b_{n-1}}}{a_n} + b_n = (a_n + b_n) + (a_{n-1} + b_{n-1})$$