COSE A CASO

Titolo nota 13/02/2018

1) Successioni per ricorrenza (o ricorsione)

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots,$

$\boxed{a_0 = 1} \qquad a_1 = 2a_0 , \quad a_2 = 2a_1 , \quad a_3 = 2a_2 , \dots$

$\boxed{a_n = 2a_{n-1} \quad \text{per } n \geq 1} \rightarrow a_n = 2^n$

$3, 7, 11, 15, 19, \dots$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \quad \text{per } n \geq 1 \end{array}} \rightarrow a_n = 3 + 4n$$

ES: $a_0 = 4 \qquad a_n = 2a_{n-1} - 1 \qquad n \geq 1$

$$\left[\begin{array}{l} a_n = 2\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right) \\ a_n - \frac{1}{2} = 2\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$b_n = a_n - \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

$$b_n = a_n - \alpha = \boxed{2a_{n-1} - 1} - \alpha = 2(b_{n-1} + \alpha) - 1 - \alpha =$$

$a_{n-1} = b_{n-1} + \alpha$

$b_{n-1} = a_{n-1} - \alpha$

$$= 2b_{n-1} + \alpha - 1$$

Se $\alpha = 1$,

$b_n = 2b_{n-1}$

$b_0 = a_0 - 1 = 3$

$b_n = 3 \cdot 2^n$

$a_n = b_n + \alpha = b_n + 1 = 3 \cdot 2^n + 1$ (con $\alpha = 1$)

$a_0=4$, $a_n = 2a_{n-1} - 1$ $\quad n \geq 1$

$a_0 = 4$
$a_1 = 7$
$a_2 = 13$
$a_3 = 25$
$a_4 = 49$
$a_5 = 97$

$a_n = 3 \cdot 2^n + 1$

$a_0 = 4$
$a_1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$
$a_2 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$
$a_3 = 3 \cdot 8 + 1 = 25$
$a_4 = 3 \cdot 16 + 1 = 49$
$a_5 = 3 \cdot 32 + 1 = 97$

In generale: Se $a_n = K \cdot a_{n-1} + h$

allora cerco α tale che $b_n = a_n + \alpha$

sia geometrica.

Es: $a_n = 8a_{n-1} + 12 \qquad a_0 = 1$

$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha$

$$b_n = a_n + \alpha \iff a_n = b_n - \alpha$$

$$b_n = a_n + \alpha = 8a_{n-1} + 12 + \alpha = 8(b_{n-1} - \alpha) + 12 + \alpha =$$

$$= 8b_{n-1} - 8\alpha + 12 + \alpha = 8b_{n-1} + \underbrace{12 - 7\alpha}_{=0}$$

$$\Rightarrow 12 - 7\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{12}{7}$$

Se $\alpha = \frac{12}{7}$, $\quad b_n = 8b_{n-1} \qquad b_0 = a_0 + \frac{12}{7} = \frac{19}{7}$

$$\Rightarrow b_n = \frac{19}{7} \cdot 8^n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{19}{7} \cdot 8^n - \frac{12}{7}$$

Es:
$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = -3a_{n-1} + 1 \end{cases}$ $\quad \frac{7}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}$

II $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1} + 4 \end{cases}$ $\quad \frac{7}{3}4^n - \frac{4}{3}$

$\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 1 \end{cases}$ $\quad -\frac{3}{2^n} + 2$

II

So già che $a_n = \underline{c} \cdot 4^n + \underline{d}$

$$n=0 \quad n=1 \quad \begin{cases} 1 = c+d \\ 8 = 4c+d \end{cases} \longrightarrow \quad c = \dots \quad d = \dots$$

Es:
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} - n \end{cases}$$

$$\cancel{b_n = a_n + \alpha} \quad \text{non funziona.}$$

$$b_n = a_n + \alpha \cdot n$$

$$b_n = a_n + \alpha n = 2a_{n-1} - n + \alpha n =$$
$$= 2(b_{n-1} - \alpha n) - n + \alpha n =$$
$$= 2b_{n-1} \underbrace{-n - \alpha n}_{=0} \Rightarrow \alpha = -1$$

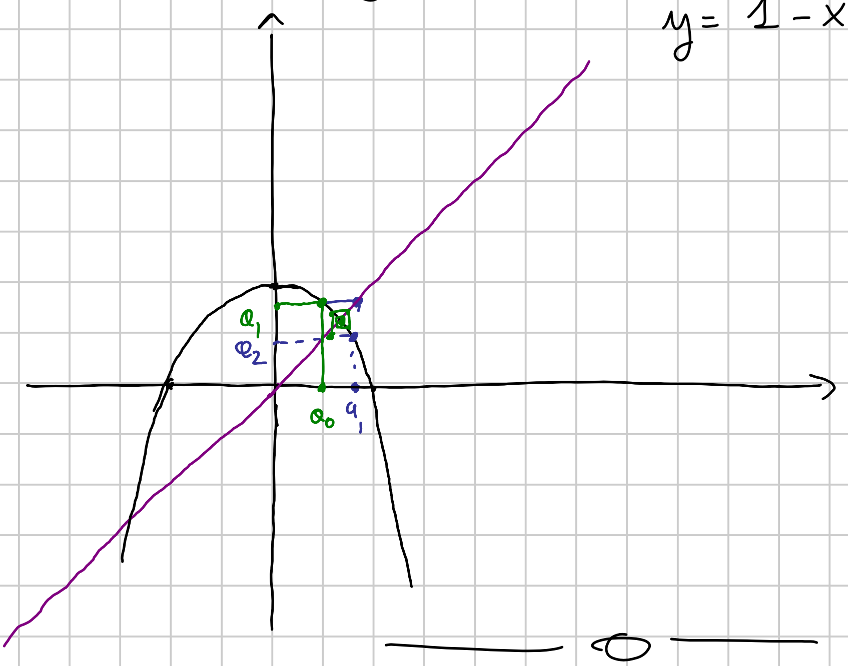
$$b_n = a_n - n$$

$$a_n = 2^n + n$$

— o —

OCCHIO! Cose del tipo
$$\begin{cases} a_n = 1 - a_{n-1}^2 \\ a_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$
sono, in generale, impossibili da risolvere esplicitamente.

$$y = 1 - x^2$$



— o —

OCCHIO! $a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} + 1$ ← questo pure è brutto!

SUCCESSIONE di FIBONACCI

ES: $\boxed{a_0 = 1, \quad a_1 = 1}$, $\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$ $\quad n \geq 2$

dò 2 valori

↳ vado indietro di 2

$a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4$

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	....

ES: $a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \qquad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \qquad n \geq 2$

ATTO DI FEDE: provo a cercare anche qui soluzioni "geometriche"

$$a_n = k^n$$

è sol. della ricorrenza sopra se

$$k^{\cancel{n}\,2} = 3k^{\cancel{n-1}\,1} - 2\cancel{k^{n-2}} \qquad \text{per tutti gli } n \geq 2$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

↳ $k = 1$ o $k = 2$

$$a_n = c \cdot 1^n + d \cdot 2^n \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

$$c\,1^n + d \cdot 2^n = 3(c \cdot 1^{n-1} + d \cdot 2^{n-1}) - 2(c\,1^{n-2} + d \cdot 2^{n-2})$$

$$c \cdot 1^n + d \cdot 2^n = c(3 \cdot 1^{n-1} - 2 \cdot 1^{n-2}) + d(3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-2})$$

$$c\underbrace{(1^n - 3 \cdot 1^{n-1} + 2 \cdot 1^{n-2})}_{=0} + d \cdot \underbrace{(2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2})}_{=0} = 0$$

$$a_n = c \cdot 1^n + d\,2^n \qquad \begin{matrix} a_0 = 1 \longrightarrow \\ a_1 = 2 \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} c + d = 1 \\ c + 2d = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} c = 0 \\ d = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a_n = 2^n.$$

$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \quad , \quad \underbrace{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}} \quad n \geq 2$

1) Cerco le "geometriche"

$a_n = k^n \longrightarrow k^n = k^{n-1} + k^{n-2}$

d

$k^2 = k + 1$

$a_n \to x^2$

$a_{n-1} \to x$

$a_{n-2} \to 1$

$x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ← ragioni.

2) Combino le "geometriche"

$$a_n = c \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3) Richiedo che inizi nel modo giusto

$$1 = a_0 = c + d$$

$$1 = a_1 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{c+d}{2} + \frac{c-d}{2}\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ (c-d)\sqrt{5} = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &c = 1 - d \\ &(1 - 2d)\sqrt{5} = 1 \end{aligned}$$

$$1 - 2d = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2d = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad d = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$c = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$$

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Es 1 $\begin{cases} a_0 = 1, \quad a_1 = 5 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \end{cases} \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 2$

$x = 3$

$\Rightarrow a_n = c \cdot 2^n + d \cdot 3^n$

$1 = a_0 = c + d$

$5 = a_1 = 2c + 3d$

Es: Quante sono le stringhe binarie di lunghezza 20 che non contengono due 0 consecutivi?

U_n = # stringhe binarie di n caratteri che non contengono due zero consecutivi e finiscono con 1

Z_n = # stringhe . . . . e finiscono con 0

$U_1 = 1 \qquad Z_1 = 1 \qquad U_n = U_{n-1} + Z_{n-1}$

$U_2 = 2 \qquad Z_2 = 1 \qquad Z_n = U_{n-1}$

$U_3 = U_2 + Z_2 \qquad Z_3 = U_2$

$$\underbrace{U_n + Z_n}_{T_n} = U_{n-1} + Z_{n-1} + U_{n-1}$$

$$T_n = T_{n-1} + U_{n-1} = T_{n-1} + T_{n-2}$$

$$U_{n-1} = U_{n-2} + Z_{n-2} = T_{n-2}$$

$T_1 = 2 \qquad T_2 = 3$

13. [⋆] Sortite casuali

"Io ho studiato attentamente le strategie militari delle crociate", affermò uno dei pellegrini, appena ebbero superato il campo di addestramento. "In particolare, durante l'assedio di Gerusalemme ogni giorno gli arabi tentavano una sortita da una delle quattro diverse porte della città, situate nei quattro punti cardinali. Il primo giorno di assedio usarono la porta a Nord, e dal secondo giorno adottarono uno stratagemma particolare per disorientare l'esercito di Goffredo di Buglione: all'alba tiravano una moneta, e se fosse uscita testa sarebbero usciti dalla stessa porta del giorno precedente, altrimenti da quella successiva in senso antiorario. (la successione è quindi Nord-Ovest-Sud-Est)". Qual è la probabilità che il 52-esimo giorno di assedio gli arabi prendano la porta a Nord? *Dare come risposta le ultime quattro cifre della somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

N 1

W E

S

$$\frac{\text{Casi fav}}{\text{Casi pos.}}$$

$N_n \quad W_n \quad S_n \quad E_n$

$N_n = N_{n-1} + E_{n-1} \qquad W_n = N_{n-1} + W_{n-1} \qquad S_n = S_{n-1} + W_{n-1}$