ESERCIZI RISOLTI - ALGEBRA (POLINOMI)

Titolo nota

10. Consideriamo il polinomio $p(x) = (1 + x^{3^1})(1 + x^{3^2})(1 + x^{3^3})(1 + x^{3^4})(1 + x^{3^5})(1 + x^{39})$, e supponiamo di svolgere il prodotto, ottenendo quindi un'espressione del tipo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{402}x^{402}$, dove ad esempio $a_0 = a_{402} = 1$. Quanti dei coefficienti $a_0, \ldots, a_{402}$ sono diversi da zero?

(A) 52 **(B)** 56 **(C)** 60 **(D)** 64 **(E)** 376

Feb 2014

Idee:
- Scrittura in base 3
- Come funziona la molt. tra polinomi.

Nel calcolare il prodotto che definisce $p(x)$, ci troveremo a calcolare prodotti del tipo

$$x^{3^{a_1}} \cdots x^{3^{a_k}} \quad \text{con } 0<a_1<\dots<a_k<6.$$

oppure

$$x^{3^{a_1}} \cdots x^{3^{a_k}} \cdot x^{39}$$

Ovvero $x^{3^{a_1}+\dots+3^{a_k}}$ oppure $x^{3^{a_1}+\dots+3^{a_k}+39}$

Per l'unicità della scrittura in base 3, tutti i numeri della forma $3^{a_1}+\dots+3^{a_k}$ con $0<a_1<\dots<a_k<6$ sono diversi.

Questi sono $2^5=32$, se contiamo anche il caso 1.

Anche i numeri della forma $3^{a_1}+\dots+3^{a_k}+39$ sono tutti diversi tra loro e sono 32.

Ma $39=3+3^2+3^3$, quindi ci sono i numeri

$$39,\ 39+3^4,\ 39+3^5,\ 39+3^4+3^5$$ che compaiono in entrambe le classi. Quindi abbiamo un totale di $2\cdot 32-4=60$ esponenti diversi per x (incluso 0).

16. Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [*]

GaS 2022 Semifinale A

Eigen Man verifica le abilità matematiche di J.A.R.V.I.S., l'intelligenza artificiale da lui creata. Scrive al touch screen il polinomio $x^{2022}+3x^{2021}+3^2x^{2020}+\ldots+3^{2020}x^2+3^{2021}x+3^{2022}$; J.A.R.V.I.S., in ogni momento, può:

- riscrivere il polinomio scritto al touch screen in un qualunque modo come prodotto di polinomi a coefficienti reali e di grado maggiore o uguale a 1; oppure
- cancellare un fattore di secondo grado ax^2+bx+c e sostituirlo con $(b-c)x+c$.

Dopo che J.A.R.V.I.S. ha effettuato un certo numero di mosse, Eigen Man legge al touch screen un polinomio $p(x)$ di primo grado, e si chiede quale sia la soluzione di $p(x)=0$. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

1) Ogni polinomio si scompone, su $\mathbb{R}$, in fattori di grado 1 o 2

$\Rightarrow$ con l'algoritmo proposto si arriva sempre a un solo polinomio di grado 1.

2) Consideriamo la seconda mossa

$$ax^2+bx+c \longrightarrow (b-c)x+c$$

ora, la radice di $(b-c)x+c$ è $x=\dfrac{c}{c-b}=\dfrac{1}{1-\frac{b}{c}}$

Se α_1, α_2 sono le radici di ax^2+bx+c, allora

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a} \qquad \alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{b}{c}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}$$

3) Con l'idea di ripeterla più volte, vediamo che, se ho ottenuto

$$((b-c)x+c)\cdot(Ax+B)=A(b-c)x^2+((b-c)B+Ac)x+cB$$

allora applicando a questo la mossa ottengo

$$((b-c)B+Ac-cB)x+cB$$

che ha radice $\dfrac{cB}{cB-Ac+B(c-b)}=\dfrac{cB}{2cB-Ac-Bb}=\dfrac{1}{2-\frac{A}{B}-\frac{b}{c}}$

α_1, α_2 erano le radici di ax^2+bx+c da cui viene il primo fattore, $\alpha_3=-\frac{B}{A}$ è la radice del secondo, allora dopo la 2^a mossa la radice del pol di $1°$ grado rimanente è

$$\frac{1}{2+\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}}$$

4) Se infine ho ottenuto $((b-c)x+c)((B-C)x+C)$ da due pol di grado 2, riapplico la 2^a mossa ed ottengo

$$((b-c)C+(B-C)c-cC)x+cC$$

che ha radice $\dfrac{1}{1-\frac{b-c}{c}-\frac{B-C}{C}}=\dfrac{1}{3+\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}}$

dove $-\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}$ $\quad -\dfrac{B}{C}=\dfrac{1}{\alpha_3}+\dfrac{1}{\alpha_4}$.

5) Dopo aver applicato quante volte possibile la 2ª mossa si otterrà dunque a

$$\frac{1}{\deg p(x)-1+\sum \text{inversi delle radici}}$$

nel nostro caso $p(x)$ ha grado 2022 e la somma degli inversi delle radici si ottiene come $-\frac{(\text{coeff di } x)}{(\text{termine noto})}=-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \text{la risposta è } \frac{1}{2021-\frac{1}{3}}=\frac{3}{3\cdot 2021-1}=\frac{3}{6063-1}=\frac{3}{6062}$$

$$\Rightarrow 3+6062=\boxed{6065}$$

5. Un riscaldamento contoso

Appena giunti su Titano, il pianeta natale di tanh(os), Dr. Stringa si accinge a calcolare in quanti dei possibili futuri gli Avengers usciranno vittoriosi. Prima di un calcolo così complicato ha però bisogno di un riscaldamento e chiede ad Eigen Man un problema contoso da risolvere.

Eigen man: «Prova questo! Hai $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ un polinomio di terzo grado. Dette x_1, x_2, x_3 le sue radici, sai che x_1, x_2, x_3, $x_1x_2x_3$ sono numeri interi in modulo minori o uguali a 51 e che $x_1+x_2+x_3$ è un numero pari. Quanto vale, al massimo, b?»

Dr. Stringa: «Elementare! Purtroppo i futuri in cui vinciamo sono molti di meno...»

Qual era la risposta al problema proposto da Eigen Man?

GaS 2022
Finale

Le formule di Viète dicono che

$$a=-(x_1+x_2+x_3)$$
$$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$
$$c=-(x_1x_2x_3).$$

Se $c\neq 0$, allora $|x_ix_j|\leq|x_1x_2x_3|=|c|\leq 51$.

$$\Rightarrow |b|\leq|x_1x_2|+|x_1x_3|+|x_2x_3|=3\cdot 51=153.$$

Se $c=0$, allora assumiamo $x_1=0$. A questo punto ho
x_2+x_3 pari
$|x_2|,|x_3|\leq 51$ e voglio massimizzare $b=x_2x_3$

Basta prendere $x_2=x_3=51$ per ottenere $b=2601$, che è il max possibile.

12. Mi faccia un'altra domanda [⋆]

Quando insegnava all'Università di Marte, il prof. Fredholm era solito dare questo problema ai suoi studenti più promettenti, o a quelli che gli stavano più antipatici. Sia f un polinomio a coefficienti reali che non ha radici multiple. Quante radici multiple può avere, al massimo, il polinomio $g(x) = f(x^3 - 3x)$? *Si dice che λ è una radice multipla del polinomio $p(x)$ se $\frac{p(x)}{(x-\lambda)^2}$ è un polinomio.*

Se $f(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$ con $a_1,\ldots,a_n$ tutte distinte,

$g(x) = (x^3-3x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x^3-3x-a_n)$

1) $\mathrm{MCD}(x^3-3x-a_i,\, x^3-3x-a_j) = \mathrm{MCD}(x^3-3x-a_i,\, a_i-a_j) = 1$
$\Rightarrow$ radici multiple devono venire dallo stesso fattore x^3-3x-a_i

2) x^3-3x-a non può essere un cubo di $x-b$, quindi, se ha una radice multipla α, questa ha molt. 2 e quindi c'è un'altra radice β. Dunque

$$2\alpha+\beta=0, \quad \alpha^2\beta=a, \quad 2\alpha\beta+\alpha^2=-3$$

$$\beta=-2\alpha \Rightarrow -2\alpha^3=a, \quad -4\alpha^2+\alpha^2=-3$$

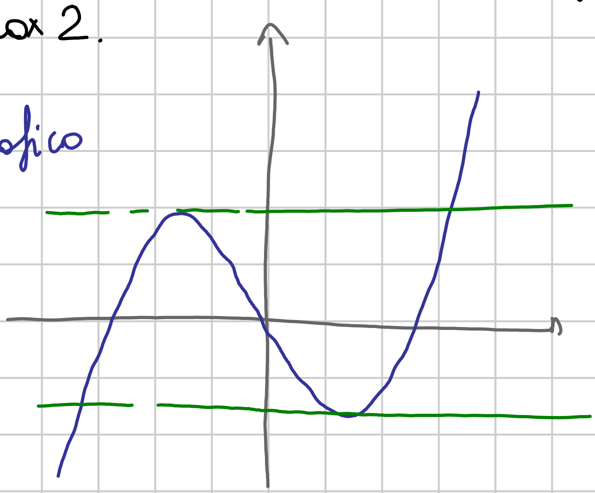
$$\Downarrow$$

$$\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm1$$

$$\Rightarrow a=\pm2.$$

$\Rightarrow$ le rad. multiple si trovano al max in 2 fattori
$\Rightarrow$ sono al max 2.

<u>Oss</u>: x^3-3x ha grafico



ci sono 2 val di a per cui l'eq $x^3-3x=a$ ha una rad. doppia.

<u>Oss 2</u>: $g(x)$ ha una rad multipla x_0 se $\begin{cases} g(x_0)=0 \\ g'(x_0)=0 \end{cases}$

$[g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x)]$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x_0^3-3x_0)=0 \\ 3(x_0^2-1)f'(x_0^3-3x_0)=0 \end{cases}$$

ma se $f(\alpha)=0$, allora $f'(\alpha)\neq0$ (f non ha rad multiple)

$\Rightarrow$ deve essere $x_0^2=1$. Da cui, ho al più 2 rad. multiple.

7. Indovinelli dal passato [⋆⋆]

Nel 1955 Matryx riceve la lettera di $\widehat{DOC}$ dal vecchio West, la quale recita così "Ci sono tante miniere, ognuna indicata da un intero. La DeuLerean si trova in quella che corrisponde al numero di coppie *non ordinate* di polinomi $p(x), q(x)$ a coefficienti interi *strettamente positivi*, di grado 4, tali che $p(1)+q(1)=26$ e che il polinomio $(p(x)q(x))^7$ abbia esattamente un coefficiente dispari". Di quale miniera si tratta?

<u>Oss</u>: Consideriamo due polinomi $p(x)$, $q(x)$ tali che $p(x)\cdot q(x)$ abbia un solo coeff. dispari.

Supponiamo che $a_j x^j$ sia il monomio in $p(x)$ con esp. minore tra quelli con coeff. dispari e che $b_h x^h$ lo sia in $q(x)$.

Allora x^{j+h} in $p(x)\cdot q(x)$ ha di certo coeff. dispari:

Tale coeff sarà $a_j b_h + \sum a_{j+k} \underbrace{b_{h-k}}_{\text{pari}} + \sum \underbrace{a_{j-k}}_{\text{pari}} b_{h+k}$

pari perché h è il minimo

pari perché j è il minimo.

Idem se prendiamo $a_i x^i$, $b_k x^k$ con i, k massimi.

Ma se $p\cdot q$ ha un solo coeff dispari, allora $i=j$, $h=k$ cioè sia p che q hanno un solo coeff. dispari.

Quindi $(p(x)q(x))^7$ ha un solo coeff dispari se p e q hanno entrambi un solo coeff. dispari.

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_4 x^4$ $\qquad$ $q(x) = b_0 + b_1 x \dots + b_4 x^4$

$a_0, \dots, a_4, b_0, \dots, b_4 \in \{1, 2, 3, \dots\}$

e $26 = p(1) + q(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_4 + b_0 + b_1 + \dots + b_4$.

Compaiono 2 dispari che hanno, al minimo, somma 2, al massimo somma 10 (e ci sono 8 pari che hanno al minimo somma 16)

Ed ora è un es. di combinatoria...