ESERCIZI RISOLTI - ALGEBRA (SUCC x RICORRENZA)

Titolo nota

(Es sulla manipolazione delle rel x ricorrenza)

7. Peste nera

"La peste del 1347 ha davvero ucciso moltissime persone", osservò uno dei pellegrini. "Ne ho studiato attentamente la diffusione e ho scoperto che se chiamiamo a_n le persone infette al giorno n dall'inizio dell'epidemia, vale $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} + 9^2a_{n-3} + \cdots + 9^{n-1}a_0$ per $n \geq 1$. Sapendo che $a_0 = 2017$, quante cifre ha il numero di persone infette al giorno 2017?"

GaS 2017
Semifinale A

$$a_n = a_{n-1} + \underbrace{9a_{n-2} + 9^2 a_{n-3} + \dots + 9^{n-1} a_0}$$

$$\text{ma } a_{n-1} = \overbrace{a_{n-2} + 9a_{n-3} + \dots + 9^{n-2} a_0}$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 9a_{n-1} = 10\, a_{n-1} \quad \text{se } n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_0 = 2017, \quad a_1 = 2017, \dots, a_n = 10^{n-1} \cdot 2017$$

a_{2017} ha $4 + 2016 = 2020$ cifre

(Succ. geometriche)

13. La sfida tra i gladiolimpionici

GaS 2022
Semif. - A

CanThor è finito sul pianeta di Schwarzaar, dove, per ritornare sulla terra, deve sfidare come gladiolimpionico il campione di Schwarzaar, che si rivela essere il suo collega di lavoro Convex Hulk. Il Gran Maestro pone allora loro il seguente problema: «Cari gladiolimpionici, una successione di polinomi è definita per ricorrenza da $p_0(x) = 1$ e $p_{n+1}(x) = (x-7)p_n(x) + p_n(2022)$ per ogni intero non negativo n. Chi determinerà il più grande intero k per cui 4^k divide $p_{2022}(7)$ avrà salva la vita!». CanThor riesce a risolvere correttamente il problema per primo: qual è la sua risposta?

$$p_{2022}(7) = (7-7)\,p_{2021}(7) + p_{2021}(2022) = p_{2021}(2022)$$

$\Rightarrow$ la domanda vera è calcolare $p_{2021}(2022)$

$$p_{n+1}(2022) = (2022-7)\,p_n(2022) + p_n(2022) = 2016\, p_n(2022)$$

$$\Rightarrow p_{n+1}(2022) = (2016)^{n+1} p_0(2022) = (2016)^{n+1}$$

$$\Rightarrow p_{2021}(2022) = (2016)^{2021} = p_{2022}(7)$$

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow p_{2022}(7) = 2^{5\cdot 2021} \cdot 3^{2\cdot 2021} \cdot 7^{2021}$$

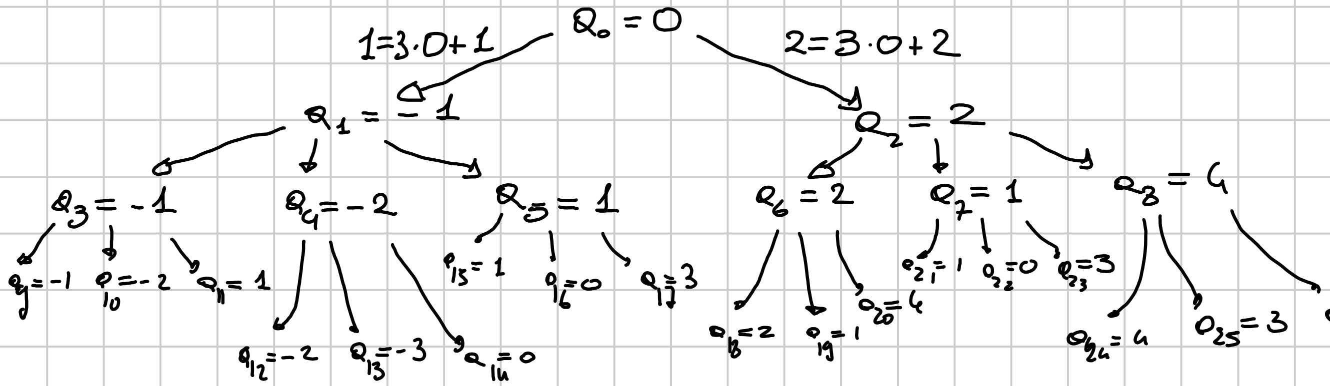
$$\Rightarrow k = \left\lfloor \frac{5 \cdot 2021}{2} \right\rfloor = \frac{5 \cdot 2020}{2} + 2 = 5050 + 2 = 5052.$$

GAS 2018 - Semifinale A (Imparare a "smanettare" con qualche idea)

11. Il Grande Almanacco delle Olimpiadi di Matematica [$\star$]

Ad ogni edizione delle Olimpiadi di Matematica, a partire dalla numero zero, Biff Tauber scommette sul vincitore grazie al Grande Almanacco. La vincita che ottiene all'edizione n è di a_n dollari, dove $a_0 = 0$, e per ogni intero n valgono le relazioni $a_{3n} = a_n$, $a_{3n+1} = a_n - 1$, e $a_{3n+2} = a_n + 2$. Finita l'edizione numero 2018, Biff realizza che, dall'inizio delle scommesse, ha guadagnato una montagna di dollari. Quanti, di preciso?

Cerchiamo di capire la struttura della successione:



Vogliamo calcolare $a_1 + \dots + a_{2018}$.

Osservo che, se $k=3n$, allora $a_k+a_{k+1}+a_{k+2} = a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2} = a_n + a_n - 1 + a_n + 2 =$

$$= 3a_n + 1$$

Quindi $\underbrace{a_0+a_1+a_2}_{3a_0+1}+\underbrace{a_3+a_4+a_5}_{3a_1+1}+\underbrace{a_6+a_7+a_8}_{3a_2+1} = 3(a_0+a_1+a_2)+3$

$S_k = a_0 + \dots + a_k \Rightarrow S_{3k-1} = 3S_{k-1} + k$

Dunque $S_{2018} = 3S_{672} + 673 = 3S_{671} + 3a_{672} + 673 =$

$$= 3(3S_{223} + 224) + 3a_{672} + 673 =$$

$$= 9S_{221} + 9(a_{222} + a_{223}) + 672 + 3a_{672} + 673 =$$

$$= 9(3S_{73} + 74) + 672 + 673 + 9a_{222} + 9a_{223} + 3a_{224} =$$

$$= 27S_{71} + 666 + 27a_{72} + 27a_{73} + 9a_{222} + 9a_{223} + 3a_{224} + 672 + 673 =$$

$$= 27(3\cdot S_{23} + 24) + \underbrace{27a_{72} + 27a_{73} + 9a_{222} + 9a_{223} + 3a_{224} + 666 + 672 + 673}_{b} =$$

$$= 27(3\cdot(3S_7 + 8) + 24) + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} =$$

$$= 243\cdot S_7 + 27a_{72} + 27a_{73} + 9a_{222} + 9a_{223} + 3a_{224} + 3267$$

$$S_7 = 0 + \cancel{(-1)} + 2 + \cancel{(-1)} + \cancel{(-2)} + \cancel{1} + \cancel{2} + \cancel{1} = 2$$

$$a_{224} = a_{3\cdot 74+2} = a_{74} + 2 = a_{3\cdot 24+2} + 2 = a_{24} + 4 = a_8 + 4 = 8$$

$$a_{223} = a_{3\cdot 74+1} = a_{74} - 1 = a_{3\cdot 24+2} - 1 = a_{24} + 1 = a_8 + 1 = 5$$

$$a_{222} = a_{3\cdot 74} = a_{74} = a_{3\cdot 24+2} = a_{24} + 2 = a_8 + 2 = 6$$

$$a_{73} = a_{3\cdot 24+1} = a_{24} - 1 = a_8 - 1 = 3$$

$$a_{72} = a_{3\cdot 24} = a_{24} = a_8 = 4$$

$$S_{2018} = 243\cdot 2 + 27(4+3) + 9(6+5) + 3\cdot 8 + 3307 =$$

$$= 486 + 189 + 99 + 24 + 3307 = 4105$$

Oss : Già rappresentare la successione come un "albero" è un'idea non banale

Domanda: Si possono fare meno conti?

7. La specie più intelligente (Teoria sulle succ. x ricorr.) GaS 2016 Semifin. A

Gli umani non sono che la terza specie più intelligente del pianeta Terra, dopo i delfini e i topi. Difatti, data una successione tale che $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, e $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$ per ogni $n \geq 2$, i topi sanno calcolare immediatamente quanto vale $a_{2016} + 3a_{2015}$. Gli umani invece possono al massimo determinare le ultime tre cifre di questo numero. Quali sono queste ultime tre cifre?

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$

$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$

$\Rightarrow$ eq. caratt. $t^2 - t - 12 = (t-4)(t+3)$

$$\Rightarrow a_n = \alpha\, 4^n + \beta(-3)^n$$

$a_0 = \alpha + \beta = 1$ $\quad 7\alpha = 3 + 2 = 5$

$a_1 = 4\alpha - 3\beta = 2$ $\quad \alpha = \frac{5}{7}$

$\beta = \frac{2}{7}$

$$a_{2016} + 3a_{2015} = \frac{5}{7}4^{2016} + \cancel{\frac{2}{7}3^{2016}} + 3\cdot\frac{5}{7}4^{2015} - \cancel{\frac{2}{7}3^{2016}} =$$

$$= 5\cdot 4^{2015} = 2\cdot 5\cdot 2\cdot 4^{2014} = 10\cdot 2^{4029}$$

ultime 3 cifre: $xy0$ con xy ultime due cifre di 2^{4029}

$2^{4025} \bmod 100$?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	$\boxed{4}$	8	16	32	64	28	56	12	24	48	96	92

14	15	16	17	18	19	20	21	22
84	68	36	72	44	88	76	52	$\boxed{4}$

$\Rightarrow \quad 4022 \equiv 2 \mod 20$

$\Rightarrow 2^{4025} \equiv 2^{9} \mod 100 \quad \Rightarrow 120.$