LA PREPARAZIONE alle OLIMAT – COMBINATORIA

Titolo nota 02/11/2022

ARGOMENTI

- $\boxed{\text{Conteggi}}$
- Grafi
- Giochi
- Invarianti

1) $\boxed{\text{Conteggi}}$

"Le 4 operazioni"

- potenza ($\{f: A \to B\}$ $\;|B|^{|A|}$)
- fattoriale ($\{f: A \to A \mid \text{bigettive}\}$ $\;|A|!$)
- binomiale ($\{B \subseteq A \mid |B| = k\}$ $\;\binom{|A|}{k}$)
- complementare ($B \subseteq A$, $|A \setminus B| = |A| - |B|$)

Ruolo degli esercizi:

(i) insegnare a guardare oltre la "storia"

(ii) insegnare a generalizzare

ANAGRAMMI

- Anagrammi di MAMMA

ho 5 spazi, scelgo i 3 dove mettere le M

$\Rightarrow \binom{5}{3}$

MamMA $\quad 5!$

maMMA

ho una parola ogni $2 \cdot 3!$ anagrammi "strani"

$\Rightarrow$ ho $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$

- Sottoinsiemi come anagrammi:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \checkmark & \times & \times & \checkmark & & \times \end{array}$$

una stringa lunga n di $\checkmark, \times$ con k spunte e $n-k$ croci.

Ad ogni tale stringa corrisponde un sottoinsieme di k elementi e viceversa.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Es: Qual è la probabilità di una cinquina crescente al lotto

Oss: fissati i 5 numeri, c'è una sola loro permutazione crescente.

$\Rightarrow$ una ogni 120.

Divido le estrazioni in $\binom{90}{5}$ gruppi, a seconda dei numeri che compongono.

In ogni gruppo, 1 sola estraz. è crescente.

VIP: • l'induzione
- pigeonhole
- double counting
- P.I.E. (principio di inclusione - esclusione)

Es di conteggi "interessanti"

- 8 amici vanno al cinema, A e B litigano, in quanti modi si possono sedere con A e B non accanto in fila

$8! = \#$ tot. di modi $\qquad \#$ modi con A e B vicini?

$\downarrow$

conto 7! consideriamo A e B come una persona sola
poi moltiplico per 2

$$8! - 2 \cdot 7! = 6 \cdot 7!$$

- Quante sono le 7-uple $(x_1, \dots, x_7)$ di interi ≥ 0 t.c.

$$x_1 + \dots + x_7 = 12.$$

2. Quante sono le sequenze di numeri di lunghezza otto composte unicamente da 0 e 1 che contengono il codice 01?

(A) 64 (B) 128 (C) 192 (D) 247 (E) 255

2^8 = tutte le sequenze

complementare: quante seq. <u>non</u> contengono 01?

sono le seq. della forma $1 \dots 1 0 \dots 0$

e queste sono 9

$\Rightarrow 2^8 - 9$

12. Due scuole si scontrano in un torneo di scacchi a cui ciascuna fa partecipare 75 alunni: vengono organizzate 75 partite in cui far giocare tutti gli studenti uno contro uno (un membro della prima scuola contro uno della seconda) sotto il controllo di un arbitro esterno. Ogni scuola numera i propri studenti da 1 a 75 e l'arbitro impone la regola che due ragazzi non si possono scontrare se la differenza tra i loro numeri è un multiplo di 3. Se n è il numero di possibili accoppiamenti che soddisfano questa regola, con quanti zeri termina n?

(A) 6 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 21

Scuola I

$A = \{1, 4, 7, \dots\}$

$B = \{2, 5, 8, \dots\}$

$C = \{3, 6, 9, \dots\}$

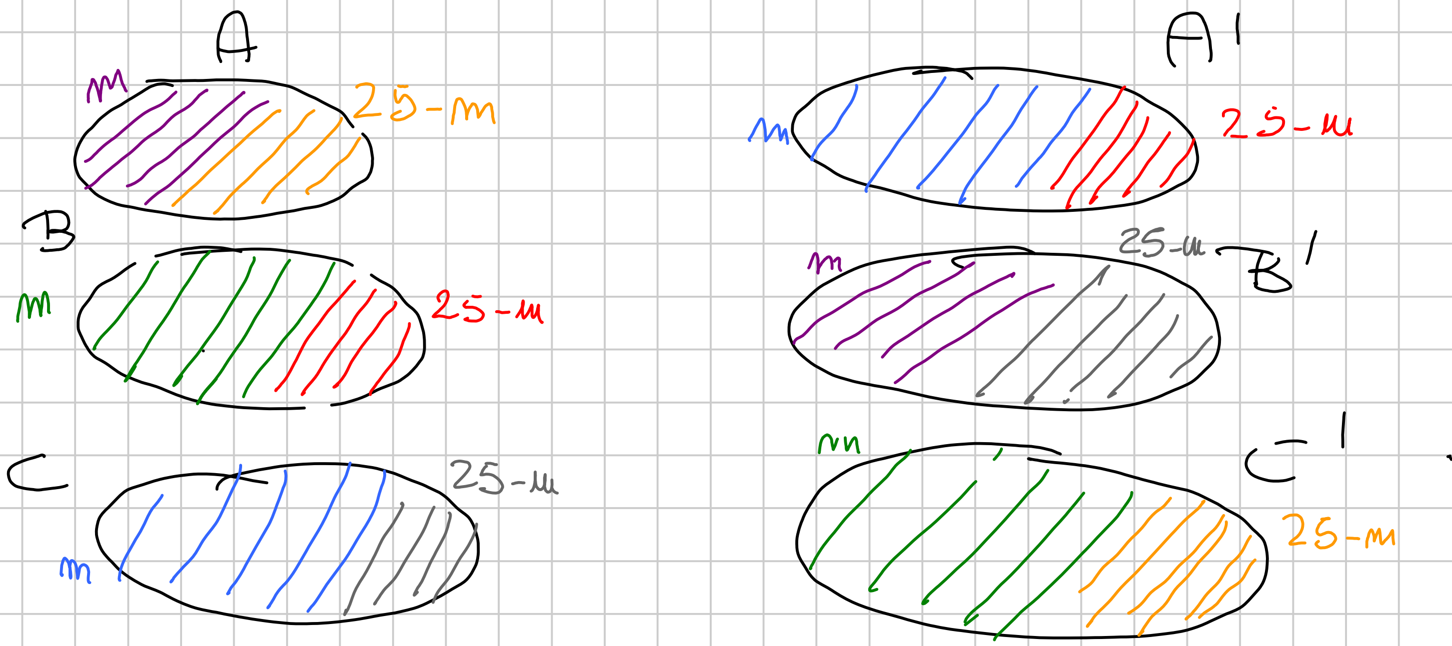
Scuola II

$A' = \{1, 4, 7, \dots\}$

$B' = \{2, 5, 8, \dots\}$

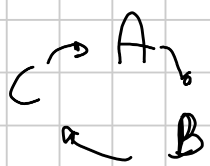
$C' = \{3, 6, 9, \dots\}$

Uno studente di A può giocare contro uno studente di B' o C'!



- Scelgo m tra 0 e 25

- $\binom{25}{m}$ → modi di scegliere m studenti in A



I		$m=1$	
A	1	2	B'
B	2	7	A'
C	3	5	B'
A	4	9	C'
B	5	3	C'
C	6	1	A'
A	7	6	C'
B	8	4	A'
C	9	8	B'

$$\sum_{m=0}^{25} \binom{25}{m}^3 \cdot (25!)^3 = (25!)^3 \sum_{m=0}^{25} \binom{25}{m}^3$$

$$\frac{25!}{m!\,(25-m)!} = \frac{25 \cdot \ldots (25-m+1)}{m \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{25}{m} \cdot \frac{24!}{(m-1)!\,(24-m+1)!}$$

$$= \frac{25}{m} \boxed{\binom{24}{m-1}} \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ $\binom{25}{m}$ è mult di 5 se $m \neq 0, 25$

$$(25!)^3 \sum \binom{25}{m}^3 = (25!)^3 (2 + 5k)$$

$25! \rightsquigarrow \underset{1}{5}, \underset{1}{10}, \underset{1}{15}, \underset{1}{20}, \underset{2}{25}$ → 6 fattori 5

$\Rightarrow (25!)^3$ ho 18 fattori 5 e di certo ho 18 fattori 2

$\Rightarrow$ 18 zeri