LA PREPARAZIONE alle OLIMAT - GEOMETRIA

Titolo nota

Tipi di problemi di geo:

1) Contosi
2) Dimostrativi

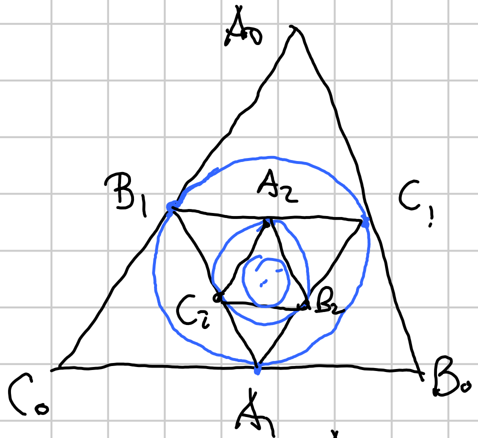
<u>Oss</u>: (i) In entrambi bisogna "accorgersi" di qualche fatto/relazione
(ii) Entrambi i tipi compaiono anche a squadre.
(iii) Non è detto che nel dimostrativo non ci siano conti.

- Talete
- Criteri di congruenza/similitudine
- Triangoli rettangoli.
- Circonferenze (angoli / t. corde, secante, tangente)

6. La torre di Raperujan

La torre di Raperujan ha 2020 piani di forma triangolare che si alternano con 2019 di forma circolare. Visto dall'alto ogni piano è contenuto nel piano subito sotto e ne tocca il contorno in tre punti. I piani $2i$, $i = 0, 1, \ldots, 2019$ sono triangoli di vertici A_i, B_i, C_i con A_{i+1} contenuto nel segmento B_iC_i, B_{i+1} nel segmento A_iC_i, e C_{i+1} nel segmento A_iB_i. Il piano terra ($i = 0$) ha angolo $\frac{\pi}{4}$ in A_0. Quanto misura l'angolo in A_{2019} moltiplicato per $\frac{2^{2019}}{\pi}$? *Se il numero è razionale, si dia come risposta la somma del denominatore e della cifra delle unità del numeratore della frazione ridotta ai minimi termini; altrimenti 9999.*

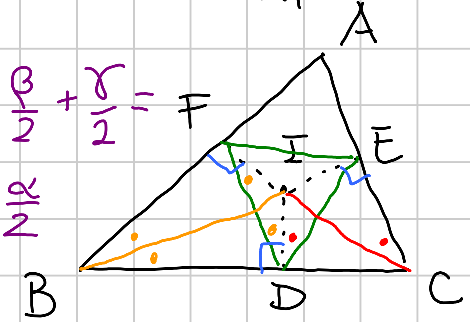
GaS 2019
SF-A



$$\hat{A}_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2^{2019}}{\pi} \cdot \hat{A}_{2019} = ?$$

$$F\hat{D}E = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$



I = incentro = intersez. delle bisettrici

$B\hat{D}I = I\hat{F}B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B, D, I, F$ sono sulla stessa circonferenza di diametro BI

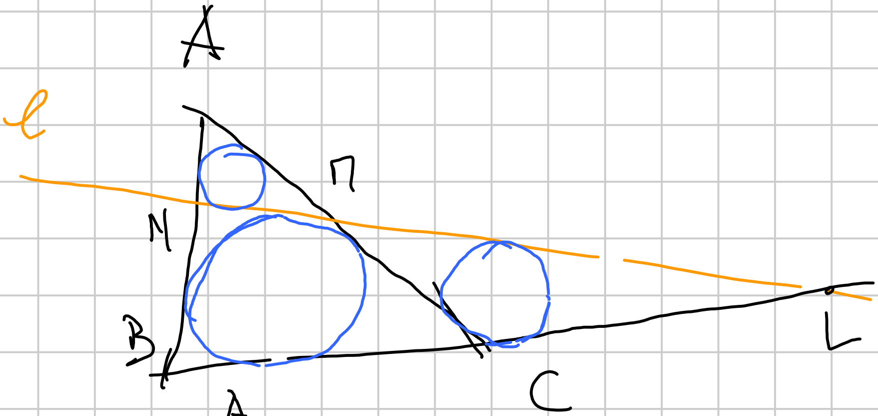
$F\hat{D}I = F\hat{B}I = \frac{\beta}{2} \Leftarrow$

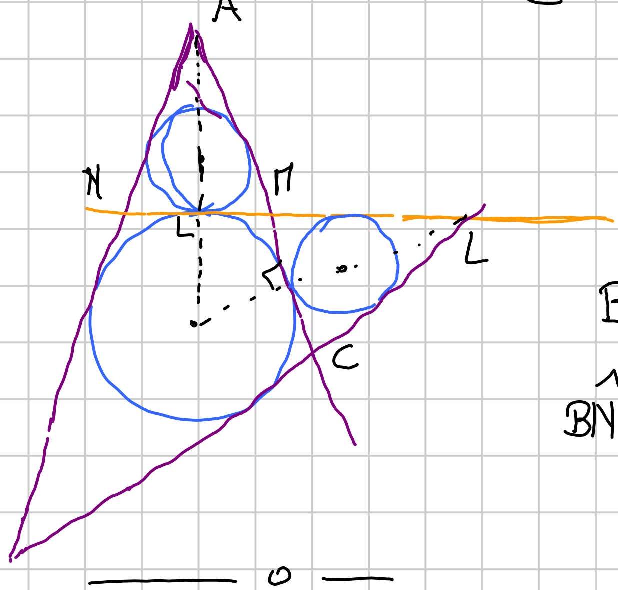
$$\hat{A}_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{A}_{n-1}}{2}, \quad \hat{A}_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \hat{A}_{2019} = ?$$

8. I tre Bernoullini

I tre Bernoullini si dirigono verso un terreno triangolare ABC. Tracciano una retta ℓ, che interseca AB in N e AC in M. Il quadrilatero $BCMN$ è circoscrivibile a una circonferenza: il primo Bernoullino costruisce allora una capanna di paglia, circolare e inscritta a $BCMN$. Il secondo Bernoullino costruisce una capanna circolare di legno, inscritta ad ANM. Il terzo Bernoullino prolunga il lato BC dalla parte di C, intersecando ℓ in un punto L, e costruisce una capanna circolare di mattoni, inscritta a LMC. Inaspettatamente, la capanna di paglia è tangente alle altre due. Il famelico Mene-lupo si avvicina, e osserva che $\widehat{BAC} = 56°$. Quanto vale $\widehat{BNM}$?

GaS 2019
SF-A





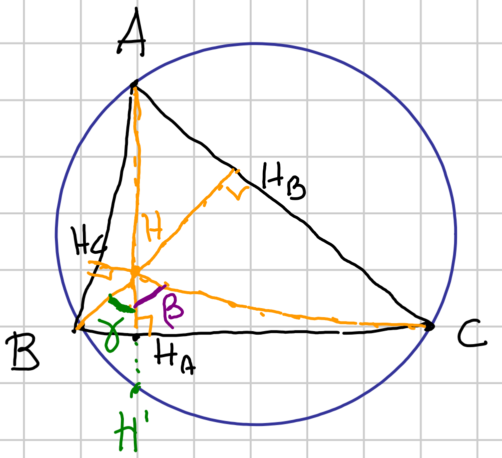
$\boxed{\text{ANM isoscele su base NM}}$

$\hat{BAC} = 56°$ $\quad B\hat{N}M = ?$

$$B\hat{N}M = 180° - M\hat{N}A =$$
$$= 180° - \left(\frac{180° - N\hat{A}M}{2}\right) = 118°$$

——— o ———

Es 1: H ortocentro di ABC.
Allora il simmetrico di H rispetto a BC sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC



La tesi è equivalente a dire che $ABH'C$ è ciclico, con H' simm. di H risp a BC.

Supponendo ABC acutangolo H' e A stanno da parti opposte rispetto a BC.

$\Rightarrow$ voglio dim che $B\hat{A}C = \pi - B\hat{H'}C$.

Osservo che $B\hat{H_A}H = B\hat{H_C}H = \frac{\pi}{2}$ (sono altezze)

[$\Rightarrow BH_AHH_C$ è ciclico]

$\Rightarrow \widehat{BHH_A} = \frac{\pi}{2} - \widehat{H_ABH} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CBH_B} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BCA}\right) = \widehat{BCA}$

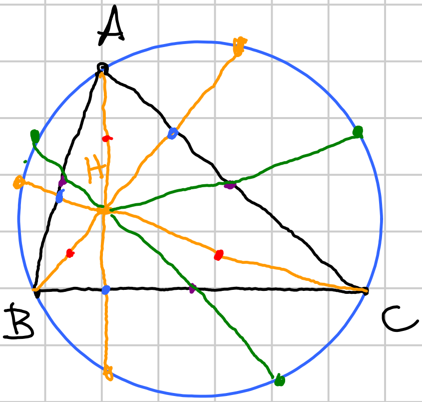
Allo stesso modo $\widehat{CHH_A} = \frac{\pi}{2} - \widehat{H_ACH} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BCH_C} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{ABC}\right) = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \pi - \widehat{BAC}$.

$\Rightarrow$ Per simmetria $\widehat{BH'C} = \widehat{BHC} = \pi - \widehat{BAC}$. □

__Cor__: I simmetrici di H risp. ai lati e ai pt. medi dei lati stanno tutti e 6 sulla cfr. circoscritta ad ABC.

__Oss__:

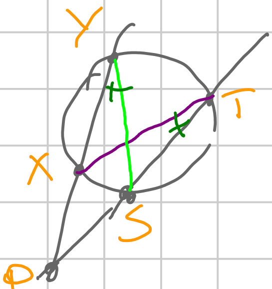


Applicando un'omotetia di centro H e fattore $\frac{1}{2}$, ottengo che: i piedi delle altezze, i pt. medi dei lati, i pt. medi di AH, BH, CH stanno tutti e 9 su una sola cfr.

__Oss__: L'es 1 si può tranquillamente fare in geom. analitica.

— o —

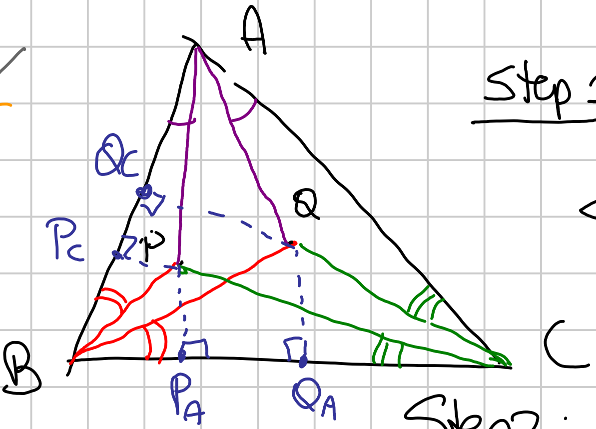
__Es 2__: ABC triangolo, P, Q tali che $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$, $\widehat{ACP} = \widehat{BCQ}$, $\widehat{CBP} = \widehat{ABQ}$. Allora le proiezioni di P, Q sui lati sono conciclche



$PX \cdot PY = PS \cdot PT$

$\frac{PX}{PT} = \frac{PS}{PY}$

$PSY \sim PXT$



__Step 1__: $P_AQ_AP_CQ_C$ ciclico.

$\iff BP_C \cdot BQ_C = BP_A \cdot BQ_A$

__Step 2__: $\triangle Q_ABQ \sim \triangle P_CBP \Rightarrow \frac{BQ_A}{BQ} = \frac{BP_C}{BP}$

$\triangle P_ABP \sim \triangle Q_CBQ \Rightarrow \frac{BP_A}{BP} = \frac{BQ_C}{BQ}$

$\frac{BQ_A}{\cancel{BQ}} \cdot \frac{BP_A}{\cancel{BP}} = \frac{BP_C}{\cancel{BP}} \cdot \frac{BQ_C}{\cancel{BQ}} \Rightarrow \boxed{BQ_A \cdot BP_A = BP_C \cdot BQ_C}$

Es x casa: H e O hanno la prop. di cui sopra.

ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

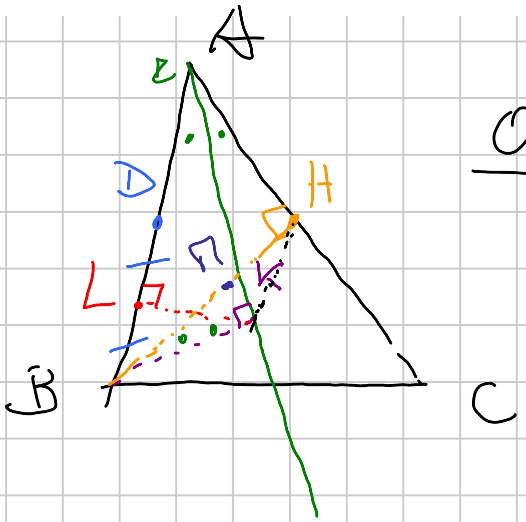
Sia ABC un triangolo, sia r la bisettrice interna dell'angolo acuto $\widehat{BAC}$ e siano K la proiezione di B su r, L la proiezione di K su AB e D il simmetrico di B rispetto ad L. Chiamiamo infine H il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente da B. Dimostrare che:

(a) $BH = 2LK$;

(b) KA biseca l'angolo $\widehat{HKD}$;

(c) il triangolo ADH è isoscele.

Feb 2022



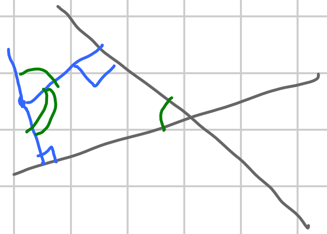
Oss: ABKH ciclico

- scrivere tutti gli angoli uguali
- cercare tri simili

$K\hat{B}H = K\hat{A}H$

$K\hat{H}B = K\hat{A}B$

$\Rightarrow$ BKH isoscele su base HB



$B\hat{K}L = B\hat{A}K = H\hat{B}K \Rightarrow \overset{\Delta}{BLK} \sim \overset{\Delta}{BHK}$