# La Preparazione Alle Olimat - Algebra

Titolo nota 27/10/2022

## 1) Polinomi

**Problema**: argomento scolastico!

ma problemi e tecniche non (del tutto) scolastici

### Approccio Olimpico

- Definizione: un'espressione del tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

con $a_n \neq 0$.

Dopo, si parla di grado, monomi, coeff., coeff. direttore come "linguaggio specifico".

- Le operazioni per esempi
- Divisibilità → Radici.

$$p(\alpha) = 0 \iff (x-\alpha) \text{ divide } p(x) \Leftrightarrow p(x) = (x-\alpha)\cdot q(x)$$

(T. di Ruffini)

$\deg q(x) = \deg p(x) - 1$

(**) • Fattorizzazione & ricerca delle radici

(*) • Relazioni Radici - Coeff (formule di Viète)

(*) • Polinomi a coeff. interi: $a - b$ divide $p(a) - p(b)$

### Differenze con l'approccio scolastico

(i) Tempo

(ii) formalismo

(iii) uso degli esercizi/esempi.

(iv) alcuni argomenti extra (*) o con impostazione diversa (**)

CAVEAT: Insegnare teoria è più facile che insegnare gli esercizi (non fare...).

ESEMPI di ESERCIZI

2. Sapendo che $(5-4x)(5x-4)=0$, quale può essere, al massimo, il valore di $3-2x$?

**(A)** 7/5 **(B)** 1/2 **(C)** 5/7 **(D)** 3/4 **(E)** 4/7

9. Consideriamo i valori reali $k$ tali che il polinomio $p(x)=x^2-(k+1)x+(3k+1)$ abbia una radice che è doppia dell'altra. Indicare la somma di tutti questi valori $k$.

**(A)** 19/2 **(B)** 9 **(C)** 17/4 **(D)** 23/2 **(E)** 19/4

$$p(x)=x^2-\underbrace{(k+1)}_{+}x+\underbrace{(3k+1)}_{\cdot}$$ radici $\alpha, 2\alpha$

$$\alpha+2\alpha=3\alpha$$

$$2\alpha^2 \qquad 3\alpha=k+1$$

$$\alpha=\frac{k+1}{3}$$

$$3k+1=2\alpha^2=\left(\frac{k+1}{3}\right)^2\cdot 2$$

4. Il polinomio $p(x)$ ha la seguente proprietà: per ogni terna di interi $a,b,c$ tali che $a+b+c=2022$ si ha che $p(a)+p(b)+p(c)=p(674)$. Si sa inoltre che $p(0)=-2696$. Quanto vale $p(2022)$?

**(A)** $-2696$ **(B)** 674 **(C)** 5392 **(D)** 8088 **(E)** Non è possibile determinarlo con i dati forniti.

1) $2022=3\cdot 674$ 2) Mi serve solo $p(2022)$.

$$\underset{a}{674}+\underset{b}{674}+\underset{c}{674}=2022 \qquad a=b=c=674$$

$$\Rightarrow 3p(674)=p(674)$$

$$\Rightarrow p(674)=0.$$

$a+b+c=2022 \Rightarrow p(a)+p(b)+p(c)=0$

$p(2022)=\,?$

$a=b=0 \quad c=2022$

$\Rightarrow p(2022)=-2p(0)=-2(-2696)\ldots$

13. Sia $p(x)=x^{20}+a_{19}x^{19}+a_{18}x^{18}+\ldots+a_1x+a_0$ un polinomio, con gli $a_i$ interi. Sappiamo che, per tutti gli interi $k$ compresi tra 1 e 20, $p(k)=2k$. Quali sono le ultime 3 cifre di $p(21)$?

$p(x)$ deg 20 monico, coeff $\in \mathbb{Z}$.

$p(k)=2k \quad k=1,\ldots,20$

Quanto fa $p(21)$?

$q(x)=p(x)-2x$ ha grado 20 e ha radici $1,2,\ldots,20$. ed è monico

$\Rightarrow q(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-20)$

$\Rightarrow p(x)=(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-20)+2x$

$p(21)=20!+42$

— o —

## GaS 2018 - A - 7

$p(x)$, $q(x)$ coeff naturali positivi $\deg = 4$

$p(1)+q(1)=26$

$(p(x)q(x))^7$ ha esattamente un coeff. dispari.

Lavoro con polinomi a coeff in $\mathbb{F}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il campo di pari&dispari.

$x^m=(p(x))^7(q(x))^7 \Longleftrightarrow p(x)=x^a \quad q(x)=x^b$