5 Combinatoria

1. Dimostrate che comunque si scelgano cinque punti in un triangolo equilatero di lato 1 ve ne sono sempre 2 a distanza minore o uguale a $\frac{1}{2}$.

2. Dimostrate che, comunque si scelgano 51 punti in un quadrato di lato 1, se ne possono trovarne 3 all'interno di un quadrato di lato $\frac{1}{5}$; è sempre possibile trovarne 3 all'interno di un cerchio di raggio $\frac{1}{7}$?

3. Dimostrate che in ogni insieme di $n + 1$ interi ne esistono sempre due la cui differenza sia divisibile per n.

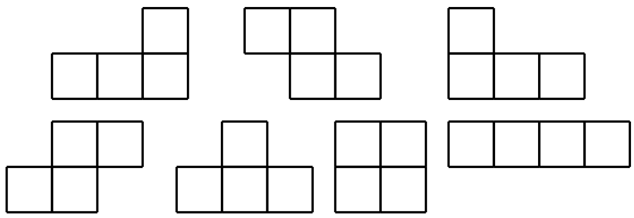
4. Dimostrate che comunque si scelgano 53 interi distinti compresi tra 1 e 100, ne esistono sempre due la cui differenza sia 10. La tesi rimane vera se chiediamo che la differenza sia 11? E 12?

5. Dimostrare che comunque vengano scelti 55 interi dall'insieme $\{1, 2, ..., 100\}$ ne esistono 2 la cui differenza è 9. Vale lo stesso se la differenza è 11 o 13?

6. Per quali n si può decomporre un quadrato come unione di n quadrati?

7. Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ che non contengono numeri consecutivi?

8. Dimostrate che non si possono disporre i 7 pezzi del tetris

   in modo da formare un rettangolo 7×4.

9. Dimostrare che in un gruppo di 5 persone almeno 2 di loro hanno lo stesso numero di conoscenti.

10. Dimostrare la seguente identità di Newton:

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j},$$

    con j, i, n interi tali che $0 \leq j \leq i \leq n$.

11. In un torneo di tennis 8 persone decidono di giocare gli incontri di doppio (due contro due) in tutti i modi possibili. Quanti incontri ci sono nell'intero torneo?

12. Quanti sono i percorsi diversi, che connettono due vertici opposti A, B di un parallelepipedo, formati da spigoli dello stesso e che passano una e una sola volta per tutti i vertici?

13. Coloriamo ogni punto del piano o di rosso o di blu. Dimostrare che esiste un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.

14. Coloriamo ogni punto del piano di rosso, di verde o di blu. Fissata una distanza d, dimostrare che esiste (almeno) una coppia di punti dello stesso colore a distanza d.

15. Quanti sono i numeri di 10 cifre in cui la cifra 1 compare esattamente una volta, la cifra 2 esattamente due volte, la cifra 3 esattamente tre volte e la cifra 4 esattamente quattro volte?

16. Prendiamo un cubo, coloriamo i vertici di 8 colori distinti e poniamolo su un tavolo. Una *manipolazione* del cubo consiste nel prendere il cubo e riappoggiarlo sul tavolo con una faccia rivolta verso di noi; consideriamo uguali due manipolazioni se dopo di esse il cubo si trova *esattamente* nella stessa posizione, ovvero se vertici dello stesso colore occupano la stessa posizione. Quante manipolazioni distinte del cubo esistono?

    Ripetere quanto sopra per gli altri 4 solidi regolari.

17. (AMC12 2001) Un ragno ha un calzino ed una scarpa per ognuna delle sue otto zampe. In quanti modi diversi il ragno può infilarsi calzini e scarpe, sapendo che, per ogni zampa, il calzino deve essere indossato prima della scarpa?

18. Abbiamo 5 scatole, etichettate da 1 a 5 e quattro palline indistinguibili l'una dall'altra. In quanti modi diversi possiamo mettere le palline nelle scatole?

    E se invece abbiamo 5 scatole indistinguibili e 4 palline colorate con 4 colori, in quanti modi diversi possiamo mettere le palline nelle scatole?

19. Quanti sono gli interi n, con $1 \leq n \leq 600$, che non sono divisibili né per 3, né per 5, né per 7?

20. Dimostrate che comunque si scelgano $n+1$ interi distinti compresi tra 1 e $2n$, ne esistono sempre due primi tra loro e due che sono uno multiplo dell'altro.

6 Hint e Soluzioni

1. *Hint*: Dividere il triangolo in 4 triangoli equilateri di lato $1/2$.
   Soluzione: Almeno due punti cadono nella stesso triangolo. E' facile mostrare che questi punti non distano più di $1/2$.

2. *Hint*: Dividere il quadrato in 25 quadrati di lato $1/5$ (ognuno è contenuto in un cerchio di raggio $1/7$).

3. *Hint*: Considerare i resti dei numeri nella divisione per n.

4. *Hint*: Considerare le classi di congruenza modulo 10.
   Soluzione: Ci sono almeno 6 numeri con la stessa classe di congruenza, cioè nella forma $10k + r$, con r fissato tra 1 e 10 e i k tutti distinti e compresi tra 0 e 9. E' facile dimostrare che presi 6 interi distinti tra 0 e 9 ce ne sono due consecutivi.
   Il risultato non vale per 11: infatti nei numeri tra 1 e 100 ci sono 10 elementi nella classe di congruenza di 1, 9 in tutte le altre. Quindi affinchè *non* si abbiano due elementi della stessa classe che distano esattamente di 11 se ne devono avere al più 5 in ogni classe, per un totale di $5 \cdot 11 = 55$.
   Dai ragionamenti fatti è anche facile costruire un controesempio: basta prendere per ogni classe il più piccolo rappresentante r e tutti i numeri della forma $22k + r$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, per un totale di 55 interi.
   Da un ragionamento analogo si vede invece che il risultato vale per 12: in caso contrario si avrebbero al più 52 elementi.

5. *Hint*: vedi esercizio 4.
   Soluzione: Come nell'esercizio 4, in caso contrario si avrebbero al più $5 \cdot 8 + 6 = 48$ elementi. Per 11 e 13 si avrebbero al massimo 50 e 52 elementi rispettivamente, per cui il risultato continua a valere.

6. *Soluzione*: è facile vedere che gli n pari maggiori o uguali a 4 vanno bene (un quadrato grande bordato in basso e a destra da quadrati più piccoli). Per gli n dispari maggiori o uguali a 9 basta dividere ulteriormente il quadrato più grosso in quadrati più piccoli. Restano i numeri $2, 3, 5, 7$, che si escludono notando che per ogni vertice V del quadrato deve esserci un quadratino che ha un vertice in V (da cui almeno 4 quadratini) e con considerazioni geometriche.

7. *Soluzione*: l'$(n + 2)$-esimo numero di Fibonacci. Infatti per $n = 1$ i sottoinsiemi sono $\emptyset, \{1\}$. La ricorsione si costruisce distinguendo in due casi: $n \in A$ oppure $n \notin A$.

8. *Hint*: Colorazione a scacchiera.

9. *Soluzione*: Supponiamo per assurdo che ognuno abbia un numero di conoscenti diverso. Allora questi numeri sono $0, 1, 2, 3, 4$. Ma allora una persona conosce tutti e un'altra non conosce nessuno, da cui l'assurdo.

10. *Hint*: Scrivere per esteso i binomiali con l'uso dei fattoriali.

11. *Soluzione*: modi di scegliere 4 persone su 8: $\binom{8}{4}$. Modi di dividerli in due squadre: 3. Totale: $3 \cdot \binom{8}{4}$.

12. *Risposta*: 6.

13. *Hint*: Costruire un esagono regolare $ABCDEF$ di centro O. *Soluzione*: Per assurdo. Si può supporre O rosso, A blu, B rosso. Quindi C blu, E rosso, D ed F blu. Sia ora G il simmetrico di O rispetto a CD. L'assurdo è immediato.

14. *Hint*: Costruire due punti di colore diverso a distanza $\sqrt{3}d$.
Soluzione: Se due tali punti esistono, basta considerare il rombo di lato d con vertici i due punti (e con l'altra diagonale di lunghezza d). Per dimostrare che esistono, considerare un qualunque triangolo di lati $d, \sqrt{3}d, \sqrt{3}d$.

15. *Risposta*:
$$\binom{10}{1;2;3;4} = \frac{10!}{1!2!3!4!}.$$

16. *Soluzione*: Colleghiamo ogni vertice con quello opposto. In questo modo otteniamo 4 segmenti che vengono permutati dalle manipolazioni. In particolare ogni manipolazione è identificata in modo univoco dalla sua azione sui segmenti, e inoltre ci sono tutte le trasposizioni di due segmenti. Per cui le manipolazioni sono in corrisponedenza biunivoca con S_4, e dunque sono $4! = 24$. L'ottaedro dà lo stesso risultato per dualità.
Per il tetraedro basta notare che una manipolazione è determinata univocamente dal colore dato a due vertici qualunque, per un totale di 12 possibilità.
Per icosaedro (e dodecaedro, dato che sono uno duale dell'altro) si deve invece fissare il colore di un vertice e poi quello di uno adiacente, per un totale di $12 \cdot 5$ possibilità.

17. *Hint*: Basta contare gli anagrammi di 1122334455667788.

18. *Risposta*:
$$\binom{5+4-1}{4} \qquad 5$$

19. *Hint*: Usare il principio di inclusione-esclusione.
Soluzione: Tra 1 e 105 sono
$$105 - \left(\frac{105}{3} + \frac{105}{5} + \frac{105}{7} - \frac{105}{3\cdot 5} - \frac{105}{3\cdot 7} - \frac{105}{5\cdot 7} + 1\right) = 82,$$
quindi tra 1 e 525 sono $5 \cdot 82 = 410$. Tra 526 e 600 sono tanti quanti tra 1 e 75 (per congruenze). I multipli di 3 o 5 sono $5 \cdot (3 + 5 - 1) = 35$, i multipli di 7 che non siano già multipli di 3 o 5 sono 8, quindi bisogna aggiungere $75 - 35 - 8 = 32$, per un totale di $410 + 32 = 442$.

20. *Hint*: Induzione su n, oppure principio dei cassetti.
Soluzione: Lavoriamo per induzione. Se tra gli $n+1$ numeri mancano o $2n$ o $2n-1$ si conclude immediatamente per ipotesi induttiva. Supponiamo allora che ci siano sia $2n$ che $2n-1$ (per cui la parte dei coprimi è fatta). Se ci fosse n avremmo la coppia $(n, 2n)$ che soddisfa la seconda parte. Supponiamo allora che non ci sia nemmeno n. Supponiamo anche che non

ci siano due numeri tra 1 e $2n-2$ che siano uno multiplo dell'altro. Se agli $n-1$ numeri tra 1 e $2n-2$ uniamo n, per ipotesi induttiva ce ne sono due che sono uno multiplo dell'altro, e uno di essi dovrà essere n. Esiste cioè a tale che $a|n|2n$, da cui la tesi.

Altra soluzione: consideriamo i cassetti $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, ..., $\{2n-1,2n\}$. Essi sono n, e noi abbiamo scelto $n+1$ numeri, quindi 2 cadranno nello stesso cassetto. Ma numeri consecutivi non hanno divisori in comune.

Siano poi $a_1, ..., a_{n+1}$ gli $n+1$ numeri scelti; per ognuno di essi scriviamo $a_i = 2^{b_i} d_i$, dove d è dispari. Vogliamo ora utilizzare il principio dei cassetti: mettiamo in un primo cassetto tutti quegli a_i per cui $d_i = 1$, in un secondo cassetto tutti quelli per cui $d_i = 3$, ..., in un n-esimo cassetto quelli per cui $d_i = 2n-1$.

Dato che abbiamo scelto $n+1$ numeri, due cadono nello stesso cassetto. Ma allora essi sono $d \cdot 2^m$, $d \cdot 2^n$ per un certo d e per certi m, n, e quindi il più piccolo dei due divide l'altro.