LA PREPARAZIONE alle OLIMAT - TEORIA dei NUMERI

Titolo nota 16/11/2022

Problema di TdN: impianto teorico simile ad Algebra disgiunto dagli esercizi.
ma non si fa a scuola (per la maggior parte)

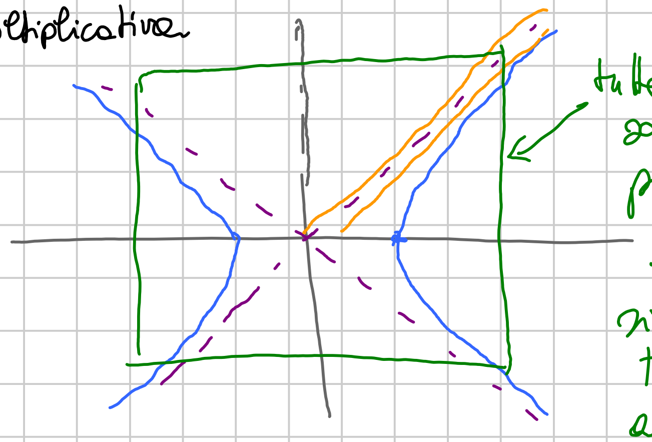
$\mathbb{Z}$

0) divisibilità, MCD, mcm, fattorizzazione, numeri primi.

?) Algoritmo di Euclide. $MCD(a,b) = MCD(a, b-a)$

1) Eq. Diofantee
- Fattorizzazione
- Stime
- Divisibilità (congruenze)

2) Congruenze
(i) Def di base
(ii) Congruenze lineari (eq. diofantee)
(iii) Struttura moltiplicativa



Es di eq diofantee

- $x^2 - y^2 = 2022$

$(x-y)(x+y) = 2022$

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + y = \frac{2022}{a} = b \end{cases}$$

a divisore di 2022

$x = \frac{a+b}{2} \qquad y = \frac{b-a}{2}$

interi $\Rightarrow$ a, b pari o a, b dispari
$\Rightarrow$ impossibile.

- $xy + x - 8y + 1 = 0$

$(x-8)(y+1) + 9 = 0$

$$\begin{cases} x-8 = a \\ y+1 = b \\ ab = -9 \end{cases}$$

- $ax+by=c \qquad a,b,c\in\mathbb{Z} \qquad (*)$

$$ax+by=0 \quad \text{se } MCD(a,b)=1,$$
$$y=ka, \quad x=-kb \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Se trovo (x_0,y_0) che risolve $ax_0+by_0=c$, allora tutte le sol sono

$$\begin{cases} x=x_0-kb \\ y=y_0+ka \end{cases} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Oss: $(*)$ si risolve se e solo se $MCD(a,b)$ divide c.

Es di congruenze lineari

$$3x\equiv 1 \mod 7 \iff 3x-7y=1$$

$3x$ ha resto 1 se diviso per 7

$$3x\equiv 1 \mod 7$$
$$\Downarrow$$
$$5\cdot 3x\equiv 5 \mod 7$$
$$\Downarrow$$
$$15x\equiv 5 \mod 7$$
$$\cancel{14}x+x\equiv 5 \mod 7$$
$$x\equiv 5 \mod 7 \Rightarrow x=5+7k \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$3x\equiv 1 \mod 7$$
$$3\cdot 5x\equiv 3\cdot 5 \mod 7$$
$$\Uparrow$$
$$15x\equiv 5 \mod 7$$
$$\Uparrow$$
$$x\equiv 5 \mod 7$$
$$\Uparrow$$

$$3x\equiv 2 \mod 7 \qquad x\equiv 2\cdot 5 \mod 7 \qquad x\equiv 3 \mod 7$$
$$x=3+7k \quad k\in\mathbb{Z}$$

Fatto: se $MCD(a,m)=1$ allora esiste b t.c. $ab\equiv 1 \mod m$.

Es: Trovare tutti i quadrati $\le 10^{2022}$ che finiscono per 27.

$$100a+27=(2k+1)^2=\underbrace{4k^2+4k}_{4\cdot h}+1$$
$$\parallel$$
$$100a+24+3$$

Se finisce per 27, è $\equiv 3 \mod 4$

ma

x	$x^2 \mod 4$
0	0
1	1

x	$x^2 \mod 4$
2	0
3	1

7. Alla lavagna è scritta la moltiplicazione $x \times y$, dove x e y sono numeri interi positivi di tre cifre. Nicolò, un po' sbadato, non ha notato il simbolo di moltiplicazione e ricopia sul suo quaderno il numero di sei cifre ottenuto giustapponendo x e y. L'insegnante, passando fra i banchi, fa notare a Nicolò che il numero da lui scritto è uguale a 7 volte il prodotto xy. Quanto vale la somma $x + y$?

Feb 2022

$$7xy = 1000x + y \qquad x, y \in \mathbb{N} \qquad 0 < x, y < 1000$$

$$y = \frac{1000x}{7x-1} =$$

$1000 : 7 = 142$, resti 30, 20, 6

$$= \frac{(7 \cdot 142 + 6)x}{7x-1} =$$

$6x - \frac{6}{7} + \frac{6}{7} + 142$

$$= \frac{142(7x-1) + 6x + 142}{7x-1} = 142 + \frac{6x+142}{7x-1} =$$

$$= 142 + \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\left(\frac{6 + 7 \cdot 142}{7x-1}\right) = 142 + \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\boxed{\frac{1000}{7x-1}}$$

divisore di 1000 che ha resto 1 se diviso per 7.

$x \geq 100 \Rightarrow 7x - 1 \geq 699 \Rightarrow \frac{1000}{7x-1} \leq \frac{1000}{699} < 2 \Rightarrow \frac{1000}{7x-1} = 1 \Rightarrow 7x - 1 = 1000$ ...

14. Quanti sono gli interi positivi n per cui $\left(2022 + \frac{1}{2}\right)^n + \left(25 + \frac{1}{2}\right)^n$ è un numero intero?

Feb 2022

$$\left(\frac{4045}{2}\right)^n + \left(\frac{51}{2}\right)^n = \frac{4045^n + 51^n}{2^n}$$

$n = 1$ $\quad 4045 + 51$ è pari? SI

$n = 2$ $\quad 4045^2 + 51^2$ è divisibile per 4? NO.

I quadrati hanno resto 0 o 1 nella div per 4

$$x^2 + y^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \mod 4$$

Oss: $n = 2k \quad k \geq 1$

$4045^n + 51^n = (4045^k)^2 + (51^k)^2 \equiv 2 \mod 4$

$\Rightarrow$ di certo non è divisibile per 4^k

$n = 2k+1$

$$4045^{2k+1} + 51^{2k+1} = (4045 + 51)(\underbrace{\ldots \pm 4045^a \cdot 51^b \ldots}_{2k+1 \text{ addendi}})$$

dispari

$4045 + 51 = 4096 = 2^{12}$

Voglio che 2^{2k+1} divida 2^{12} $\Rightarrow 2k+1 \leq 11$ $\qquad n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Un numero di tre cifre, diverse fra loro e non nulle (diciamo abc), si dice *petaloso* se esiste un intero $n \geq 1$ tale che il numero $cba\underbrace{00\cdots0}_{n\text{ zeri}}$ sia multiplo di abc. Il più piccolo n che rende vera questa divisibilità è detto *fiore* di abc.
Esempio. Il numero 132 è petaloso, in quanto 132 divide 23100. Siccome $23100/132 = 175$ è intero ma $2310/132 = 17{,}5$ non lo è, il fiore di 132 è 2.

(a) Sia abc un numero di tre cifre (diverse fra loro e non nulle) della forma $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ con x, y, z interi non negativi e $y \leq 2$. Dimostrare che abc è petaloso.

(b) Quanto vale al massimo il fiore di un numero petaloso (di tre cifre)?

(c) Sia abc un numero petaloso. Dimostrare che abc non è divisibile per 13.

Feb 2022

(a) $[abc] = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, $x, y, z \geq 0$, $y \leq 2$.

$\Rightarrow [abc]$ petaloso $\qquad [cba] \cdot 10^n$ divisibile per $[abc]$ cioè per $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

$n \geq \max\{x, z\} \Rightarrow 2^x \cdot 5^z$ divide $[cba] \cdot 10^n$

$y = 0$ ok

$y = 1, 2$ $\qquad y = 1 \Rightarrow [abc]$ multiplo di 3

$\Rightarrow a+b+c$ multiplo di 3 $\Rightarrow [cba]$ mult. di 3.

$y = 2$ uguale.

(b) $[abc] = 2^a \cdot 5^b \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $\rightarrow$ devono comparire anche nella fattorizzazione di $[cba]$

$[cba] \cdot 10^n = [cba] \cdot 2^n \cdot 5^n$

$\Rightarrow [cba] = 2^x \cdot 5^y \cdot p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \cdot q$ $\quad \boxed{\beta_i \geq \alpha_i}$

$[cba] \cdot 10^n = 2^{x+n} \cdot 5^{y+n} \cdot \boxed{}$

$a \leq x+n \quad b \leq y+n \Rightarrow n \leq 9$ (perché $a, b \leq 9$ se $[abc]$ ha 3 cifre)

$2^9 = 512$ $\qquad$ minimo n t.c. 512 divide $215 \cdot 10^n$
$n = 9$

(c) $[abc]$ petaloso $\Rightarrow$ 13 non divide $[abc]$

Se $[abc]$ è petaloso e 13 divide $[abc] \Rightarrow$ 13 divide $[cba]$

$100a + 10b + c$, $100c + 10b + a$ multipli di 13

$\Rightarrow (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$ è mult. di 13
ASSURDO.

4. Flauto magico [$\star$]

Il pifferaio di Hamel sapeva attirare una quantità più che numerabile di topi con il suo flauto. Un giorno arrivò in una città dove c'erano 900 topi numerati da 1 a 900, e suonò 900 canzoni. L'n-esima canzone attirava il topo m quando $m \leq n$ e $\mathrm{MCD}(m,n) = 1$. Per quali n accadeva che la canzone n attirasse un numero di topi che è divisore di n? *Si risponda indicando la somma di tali n.*

GaS
2019
SF-A

$\# \{ m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 1 \leq m \leq n, \ \mathrm{MCD}(m,n) = 1 \} = \varphi(n)$

f. φ di EULERO.

$\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)\, p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$

$\varphi(7) = 6$

$\varphi(49) = 6 \cdot 7$

$\varphi(7^3) = 6 \cdot 49$

$\varphi(3) = 2$

$\varphi(9) = 2 \cdot 3$

$\varphi(27) = 2 \cdot 9$

$\varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6$

Per quali n, $\varphi(n)$ divide n

$\boxed{\varphi(1) = 1}$

$\boxed{\varphi(2) = 1}$

$\varphi(3) = 2$

$\boxed{\varphi(4) = 2}$

$\varphi(5) = 4$

$\boxed{\varphi(6) = 2}$

$\varphi(7) = 6$

$\boxed{\varphi(8) = 4}$

$\varphi(2^k) = (2-1) \cdot 2^{k-1} = 2^{k-1}$

$\varphi(2^a \cdot 3^b) = 2^{a-1} \cdot 2 \cdot 3^{b-1} = 2^a \cdot 3^{b-1}$

$a \geq 1$

$b \geq 0$ ok